**السؤال الأول : (16):** استنتج المعادلات التفاضلية الكافية لمعرفة كل المجاهيل مع الرسم الملائم ، **لحركة جسم صلب في حالتين فقط مما يلي:** ١) يتحرك الجسم حركة انسحابية في $R^3$ . ٢) يتحرك الجسم في $R^3$ وفيه نقطتان ثابتتان. ٣) إن الجسم نواس مركب. ٤) يتحرك الجسم حركة مستوية ومستويها الأساسي $OXY$ .

**السؤال الثاني : (24):** أجب **عن سؤالين فقط** مما يلي:

١) أوجد المعادلات التفاضلية **لحركة جسم صلب فيه نقطة ثابتة وحيدة** وذلك في أعم شكل وبدلالة $p_t$ ، $q_t$ ، $r_t$ ثم اذكر الشروط التي تجعل هذه المعادلات تأخذ شكل معادلات أولر التحريكية وبناءاً عليه استنتج معادلات أولر التحريكية.

٢) استنتج معادلات أولر التحريكية إذا كان الجسم ثقيلاً كتلته $M$ واحداثيات مركز ثقله $(b_1 , b_2 , b_3)$ في $R_s$ ، مع الرسم النموذجي.

٣) اذكر الشروط التي تجعل حركة الجسم الثقيل حول نقطة ثابتة منه توافق حالة أولر وبناءاً عليه اكتب معادلات أولر الموافقة لهذه الحالة مع الرسم الموضّح.

٤) اذكر الشروط التي تجعل حركة الجسم الثقيل حول نقطة ثابتة منه توافق حالة لاغرانج ثم اكتب معادلات أولر الموافقة لهذه الحالة مع الرسم الواضح.

**السؤال الثالث : (26):** أجب **عن سؤال واحد** مما يلي:

أولاً) إذا تحركت صفيحة دائرية متجانسة نصف قطرها $R$ وكتلتها $M$ ، في المستوي الشاقولي **وكانت نقطة واحدة فقط من محيطها ثابتة** ، فالمطلوب:

١) أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع الصفيحة مع الرسم الواضح.

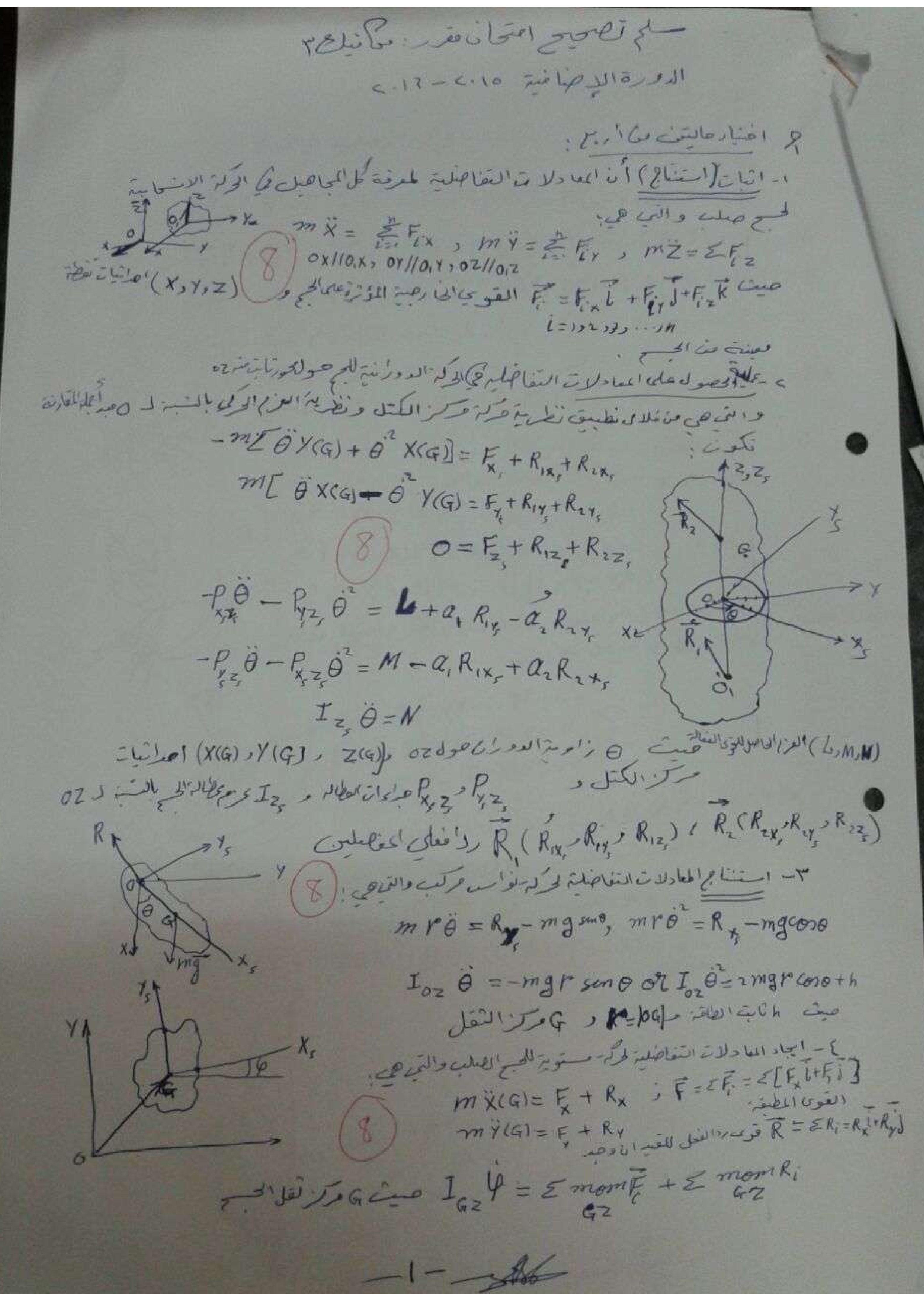
٢) **إذا بدأت الصفيحة حركتها من السكون** وكان $\overline{OG}$ يصنع مع الشاقول النازل $OX$ زاويةً قدرها $\frac{\pi}{6}$ لحظة البدء، حيث: $G$ مركز الثقل، **فأوجد القانون الزمني للحركة واذكر صفاته.**

ثانياً) إذا تصادمت كرتان كتلتاهما $M_1$ ، $M_2$ **تصادماً غير مباشر** ، وكانت سرعتاهما قبل التصادم مباشرةً $\vec{V_1}$ ، $\vec{V_2}$ وتصنعان مع خط المركزين الزاويتين $\alpha_1$ ، $\alpha_2$ بالترتيب، فالمطلوب:

١) ارسم الشكل المناسب. ٢) أوجد سرعتيهما بعد التصادم مباشرةً.

**السؤال الرابع : (34):** إذا كان المخروط الدوراني الصلب متجانساً وكتلته $M$ ونصف قطر قاعدته $R$ وارتفاعه $H$ ، وتحرك حول رأسه الثابت، فالمطلوب: ١) أوجد الوسطاء المستقلة مع الرسم الصحيح. ٢) أوجد معادلات أولر المناسبة. ٣) أوجد التكاملات الأولية بدلالة $p_t$ ، $q_t$ ، $r_t$ . ٤) أوجد المعادلة التفاضلية لحركة محور دورانه الذاتي حول خط الأفق

——— تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح ——— مدرس المقرر: د.كامل محمد ———




سلم تصحيح امتحان مقرر: ميكانيك ٣

الدورة الإضافية ٢٠١٥-٢٠١٦م

ج١ اختيار حالتين من أربع:

١- اثبات (استنتاج) أن المعادلات التفاضلية لمعرفة كل المجاهيل في الحركة الانسحابية لجسم صلب والتي هي:

$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$ , $m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$ , $m\ddot{z} = \sum F_{iz}$

$Ox//O_1x,\ Oy//O_1y,\ Oz//O_1z$

(8)

حيث $\vec{F_i} = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k}$ القوى الخارجية المؤثرة على الجسم و $(x, y, z)$ احداثيات نقطة معينة من الجسم

$i = 1, 2, 3, \ldots, n$

٢- الحصول على المعادلات التفاضلية في الحركة الدورانية للجسم حول محور ثابت $Oz$ والتي هي من خلال تطبيق نظرية مركز الكتل ونظرية العزم الحركي بالنسبة لـ $O$ وحيد الملازمة تكون:

$$-m[\ddot\theta Y(G) + \dot\theta^2 X(G)] = F_{x_s} + R_{1x_s} + R_{2x_s}$$

$$m[\ddot\theta X(G) - \dot\theta^2 Y(G)] = F_{y_s} + R_{1y_s} + R_{2y_s}$$

(8)

$$0 = F_{z_s} + R_{1z_s} + R_{2z_s}$$

$$-P_{x_sz_s}\ddot\theta - P_{y_sz_s}\dot\theta^2 = L + a_1 R_{1y_s} - a_2 R_{2y_s}$$

$$-P_{y_sz_s}\ddot\theta - P_{x_sz_s}\dot\theta^2 = M - a_1 R_{1x_s} + a_2 R_{2x_s}$$

$$I_{z_s}\ddot\theta = N$$

حيث $\theta$ زاوية الدوران حول $Oz$ و $(X(G), Y(G), Z(G))$ احداثيات مركز الكتل و $(L, M, N)$ العزوم الحاصلة للقوى الفعالة

$P_{x_sz_s}$ و $P_{y_sz_s}$ جداءات العطالة و $I_{z_s}$ عزم عطالة الجسم بالنسبة لـ $Oz$

$\vec{R_1}(R_{1x_s}, R_{1y_s}, R_{1z_s})$ ، $\vec{R_2}(R_{2x_s}, R_{2y_s}, R_{2z_s})$ ردا فعلي المفصلين

٣- استنتاج المعادلات التفاضلية لحركة نواس مركب والتعويض: (8)

$$m r\ddot\theta = R_{y_s} - mg\sin\theta,\quad m r\dot\theta^2 = R_{x_s} - mg\cos\theta$$

$$I_{Oz}\ddot\theta = -mgr\sin\theta \text{ or } I_{Oz}\dot\theta^2 = 2mgr\cos\theta + h$$

حيث $h$ ثابت الطاقة، $r = |OG|$ و $G$ مركز الثقل

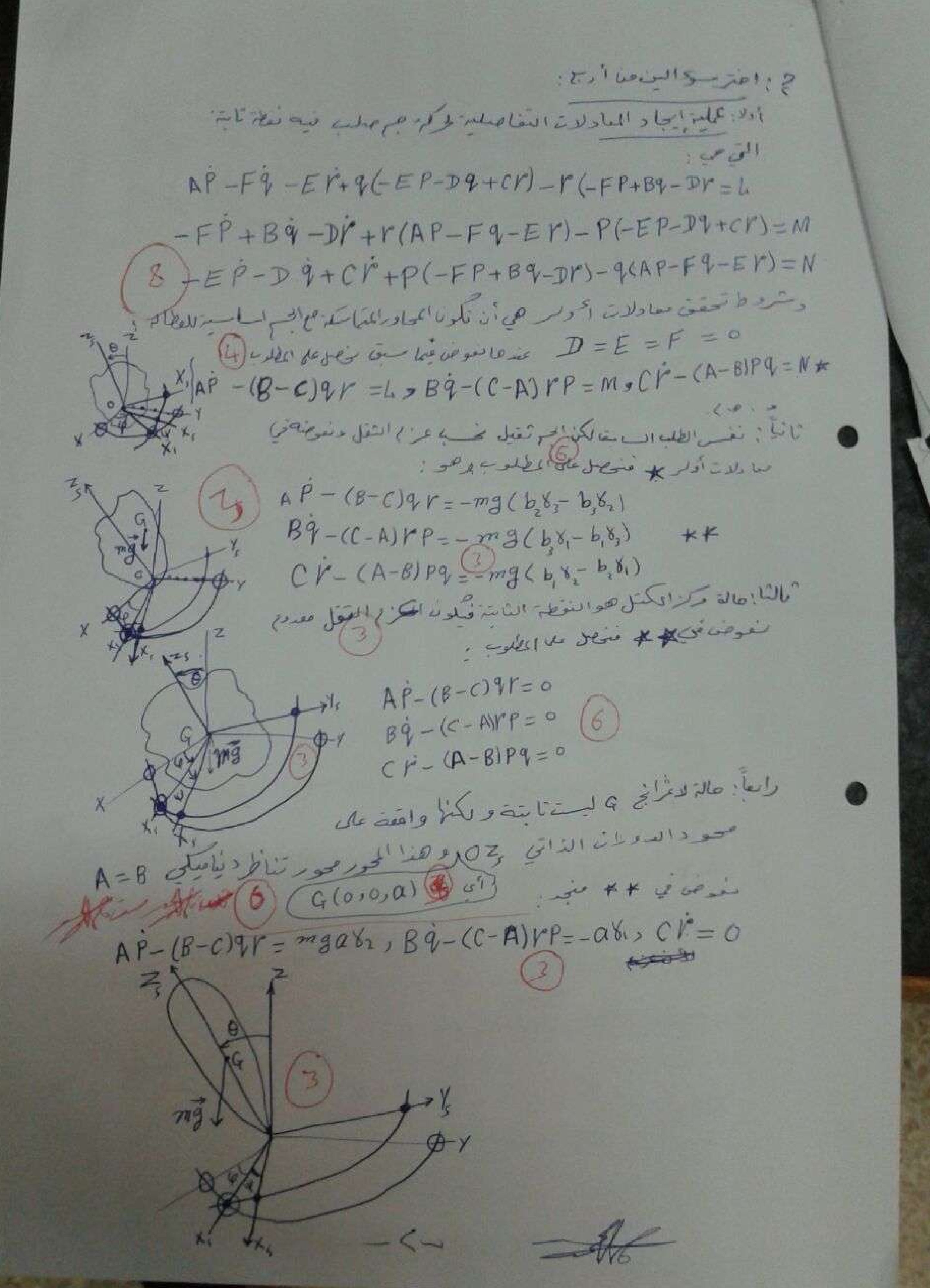
٤- ايجاد المعادلات التفاضلية لحركة مستوية للجسم الصلب والتعويض:

$m\ddot{X}(G) = F_x + R_x$ ; $\vec F = \sum \vec F_i = \sum[F_x\vec i + F_y\vec j]$ القوى المطبقة

$m\ddot{Y}(G) = F_y + R_y$ ; $\vec R = \sum R_i = R_x\vec i + R_y\vec j$ قوى رد الفعل للقيد ان وجد

(8)

$I_{Gz}\ddot\varphi = \sum mom_{Gz}\vec F_i + \sum mom_{Gz} R_i$ حيث $G$ مركز ثقل الجسم



ج: اخترت السؤالين أ ، ج :

أولاً: عملية إيجاد المعادلات التفاضلية لحركة جسم صلب فيه نقطة ثابتة:

القوى هي :

$$A\dot p - F\dot q - E\dot r + q(-Ep - Dq + Cr) - r(-Fp + Bq - Dr) = L$$

$$-F\dot p + B\dot q - D\dot r + r(Ap - Fq - Er) - p(-Ep - Dq + Cr) = M$$

$$-E\dot p - D\dot q + C\dot r + p(-Fp + Bq - Dr) - q(Ap - Fq - Er) = N$$

(8)

وشروط تحقق معادلات أويلر هي أن تكون المحاور المتماسكة مع الجسم أساسية للعطالة

$D = E = F = 0$ عندما نعوض فيما سبق نحصل على المطلوب (4)

$A\dot p - (B-C)qr = L$ ، $B\dot q - (C-A)rp = M$ ، $C\dot r - (A-B)pq = N$ ★

ه.م.

ثانياً: نفس الطلب السابق لكن الجسم ثقيل نحسب عزم الثقل ونعوضه في معادلات أولر ★ فنحصل على المطلوب وهو: (6)

$$A\dot p - (B-C)qr = -mg(b_2\gamma_3 - b_3\gamma_2)$$

$$B\dot q - (C-A)rp = -mg(b_3\gamma_1 - b_1\gamma_3) \quad ★★$$

$$C\dot r - (A-B)pq = -mg(b_1\gamma_2 - b_2\gamma_1)$$

(3)

ثالثاً: حالة مركز الكتلة هو النقطة الثابتة فيكون عزم الثقل معدوم نعوض في ★★ فنحصل على المطلوب: (3)

$$A\dot p - (B-C)qr = 0$$

$$B\dot q - (C-A)rp = 0 \quad (6)$$

$$C\dot r - (A-B)pq = 0$$

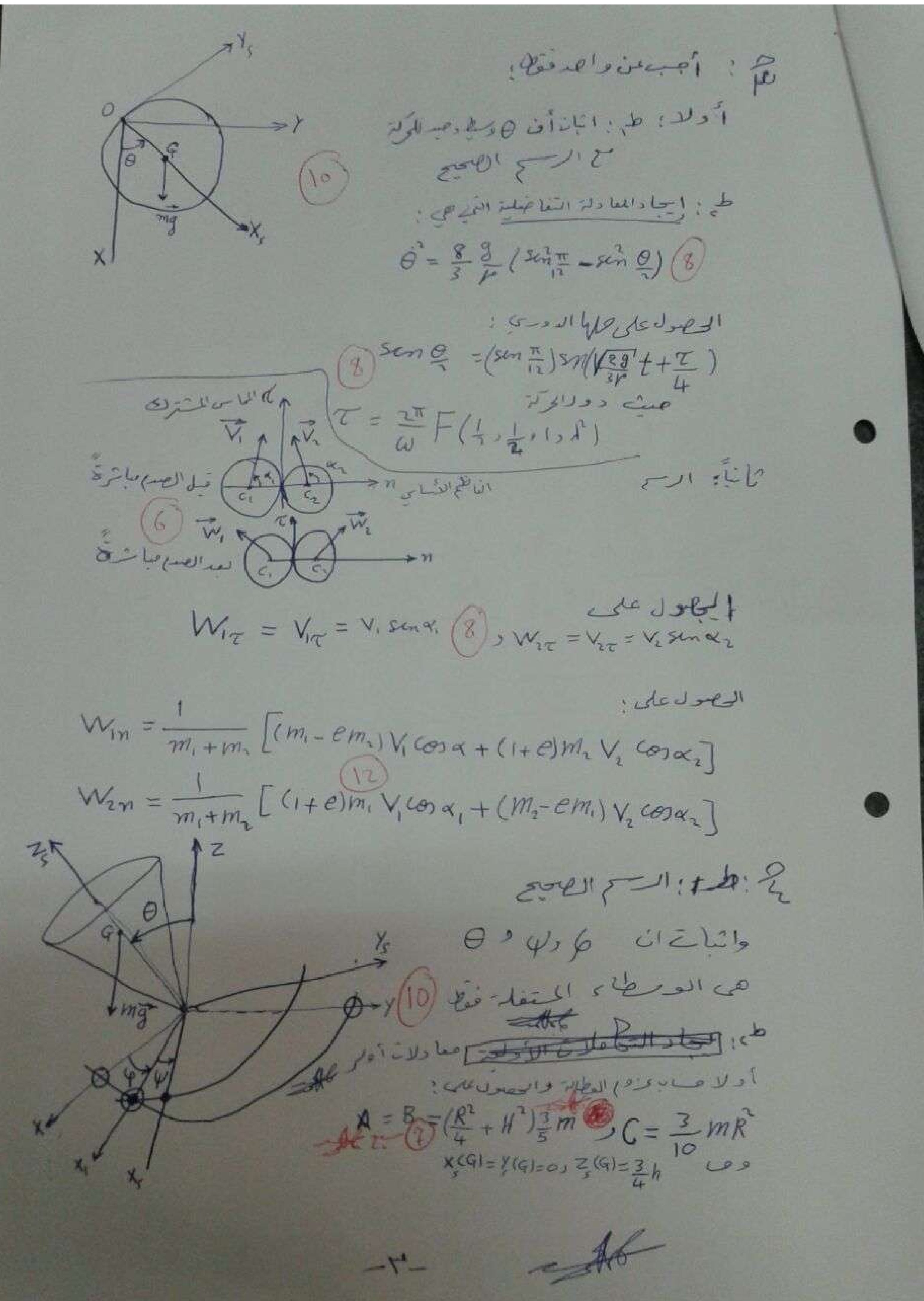
(3)

رابعاً: حالة لاغرانج G ليست ثابتة ولكنها واقعة على محور الدوران الذاتي $Oz_3$ وهذا المحور محور تناظر ديناميكي $A=B$ أي $G(0,0,a)$ نعوض في ★★ نجد: (6)

$$A\dot p - (B-C)qr = mga\gamma_2 \;,\; B\dot q - (C-A)rp = -a\gamma_1 \;,\; C\dot r = 0$$

(3)

(3)



س٣: أجب عن واحد فقط:

أولاً: ط١: اثبات أن $\theta$ وسيط وصف الحركة مع الرسم الصحيح (10)

ط٢: إيجاد المعادلة التفاضلية التي هي:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{8}{3}\frac{g}{r}\left(\sin^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad (8)$$

الحصول على حلها الدوري:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \left(\sin\frac{\pi}{12}\right)\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{2g}{3r}}\,t + \frac{\tau}{4}\right) \quad (8)$$

حيث دور الحركة

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \lambda^2\right)$$

ثانياً: الرسم



(6)

الحصول على

$$W_{1\tau} = V_{1\tau} = V_1\sin\alpha_1 \quad (8), \quad W_{2\tau} = V_{2\tau} = V_2\sin\alpha_2$$

الحصول على:

$$W_{1n} = \frac{1}{m_1+m_2}\left[(m_1 - em_2)V_1\cos\alpha + (1+e)m_2V_2\cos\alpha_2\right]$$

(12)

$$W_{2n} = \frac{1}{m_1+m_2}\left[(1+e)m_1V_1\cos\alpha_1 + (m_2 - em_1)V_2\cos\alpha_2\right]$$

ثانياً: ط١: الرسم الصحيح

واثبات ان $\varphi$ و $\psi$ و $\theta$

هي الوسطاء المستقلة فقط (10)

ط٢: ~~إيجاد التكاملات الأولية~~ معادلات أويلر

أولاً حساب عزوم العطالة والحصول على:

$$A = B = \left(\frac{R^2}{4} + H^2\right)\frac{3}{5}m \quad (7), \quad C = \frac{3}{10}mR^2$$

ومن $x_s(G) = y_s(G) = 0,\ z_s(G) = \frac{3}{4}h$

التعويض في حالة الانزلاج والحصول على

$$\frac{3}{5}\left(\frac{R^2}{4}+H^2\right)\dot{p}_s-\frac{3}{5}\left(H^2-\frac{R^2}{4}\right)q_s r_s=\frac{3}{4}Hg\gamma_2$$

$$\frac{3}{5}\left(\frac{R^2}{4}+H^2\right)\dot{q}_s-\frac{3}{5}\left(\frac{R^2}{4}+H^2\right)p_s r_s=-\frac{3}{4}Hg\gamma_1 \quad (6)$$

$$\dot{r}=0$$

ط٣: الحصول على التكاملات الأولية

(3) $$\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta=C_1$$

(3) $$\left(\frac{R^2}{4}+H^2\right)\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)+\frac{R^2}{2}C_1^2=-\frac{g}{2}H\gamma_3+\frac{10h}{3m}$$

(3) $$\dot{\varphi}\sin^2\theta+\frac{CC_1}{A}\cos\theta=C_3$$

ط٤: حذف $\dot{\varphi}$ من التكاملات في ط٣ والحصول على: (2)

$$\left(\frac{R^2}{4}+h\right)\left[\dot{\theta}^2+\frac{\left(C_3-\frac{CC_1}{A}\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta}\right]+\frac{gH}{2}\cos\theta=\frac{10H}{3M}-\frac{R^2}{2}C_1^2$$

انتهى

د. [signature]

[signature]